

Infos : Quelques précisions sur le contenu de l'examen

- ◇ RaQ présentiel Vendredi 13 juin à 13h15 ? Ok
- ◇ Forum reste ouvert jus qu'en 13 juin 17h
- ◇ Que faire des cours de lundi prochain ? corrigé
- ◇ un point sur l'assistanat : voir [people.epfl.ch/david.strütt](#)
(ou google David Strütt epfl)

pour les infos sur la procédure de cancel cours

Rappel :

cette semaine, c'est révisé !

2015

Question 30: Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$. Alors, pour tout point $p \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p).$$

☐ VRAI ~~FAUX~~

Quelle partie du cours
ça rappelle ?

continue / diff. fonctions de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

règle de Schwartz

$$\text{si } f \in C^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p)$$

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 = f(x, y)$$

$$(0, 0) = p.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1$$

2016

Question 8: Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = (x^2 + y)z + z^2 - z.$$

Alors un vecteur v perpendiculaire à la surface de niveau de f passant par le point $(2, 0, -1)$ est

☐ $v = (1, -4, 1)$

☒ $v = (4, 1, -1)$

☐ $v = (-1, -4, 4)$

☐ $v = (-4, 1, 1)$

$\nabla f(2, 0, -1)$
est colinéaire
à quel vecteur?

$$\nabla f(x, y, z) = (2xz, z, x^2 + y - 1 + 2z)$$

Quelle partie du cours?

∇f
- plan tangent &
droite tangente
aux ensembles de niveau.

$p_x :$
 $\nabla f \perp$ ensemble
de niveau.

$$\begin{aligned} \nabla f(2, 0, -1) &= (-4, -1, 4 + 0 - 1 - 2) \\ &= (-4, -1, 1) \end{aligned}$$

2017

Question 18: L'ensemble

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{4} z^2 = 4 \right\}$$

est le graphe d'une fonction différentiable dans un voisinage du point $p = (-1, 2, -2) \in S$.

L'équation du plan tangent à S en p est

☐ $x + y + z - 3 = 0$

☐ $x + y + z + 1 = 0$

☒ $2x - 2y + z + 8 = 0$

☐ $x + y + z - 1 = 0$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mapsto z = f(\tilde{x}, \tilde{y}) + \langle \nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}), (x - \tilde{x}, y - \tilde{y}) \rangle$$

Plan tangent : option 1 : plan tangent au graphe
option 2 : plan tangent à un ensemble de niveau.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle \nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), (x - \tilde{x}, y - \tilde{y}, z - \tilde{z}) \rangle = 0$$

$$f(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}z^2$$

$$\nabla f(2x, y, \frac{1}{2}z)$$

$$\nabla f(-1, 2, -2) = (-2, 2, -1)$$

$$0 = -2(x+1) + 2(y-2) - (z+2) = 0$$

$$\Rightarrow -2x + 2y - z - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2y + z + 8 = 0$$

2017

Question 19: Soit $(u_n)_{n \geq 1}$, avec $u_n = (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$, une suite divergente. Alors $(x_n)_{n \geq 1}$ est une suite divergente dans $\mathbb{R}$.



VRAI



FAUX

Quelle partie du cours?

$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$

(u_n) converge si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$

tq $\forall n \geq N, u_n \in B(l, \varepsilon)$

limite.

(u_n) converge
 $\Downarrow$

(x_n) converge, &
 (y_n) converge, &
 (z_n) converge.

$$\neg [(u_n) \text{ converge}] \Leftrightarrow \neg [(x_n) \text{ converge}, (y_n) \text{ converge et } (z_n) \text{ converge}]$$

$$(u_n) \text{ diverge} \Leftrightarrow (x_n) \text{ diverge or } (y_n) \text{ diverge or } (z_n) \text{ diverge.}$$

Counter-example :

$(1, n, n)$ diverge, mais $x_n = 1$ converge.

$$A \Leftrightarrow B.$$

$$\neg A \Leftrightarrow \neg B$$

$$A \Rightarrow B.$$

$$\neg B \Rightarrow \neg A. \checkmark$$

$$\neg A \Rightarrow \neg B \quad X$$

2017

Question 27: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx \leq \int_0^2 \left(\int_0^2 f(x, y) dy \right) dx.$$

☐ VRAI ☒ FAUX

Prop. alg. $\int$

$$f \geq 0$$

$$\iint_{E_1} f(x, y) dx dy \leq \iint_E f(x, y) dx dy.$$

$E_1 \subseteq E$

$$E_1 = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$= \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \}$$

$$E = [0, 2] \times [0, 2]$$

$$f(x, y) = -1$$

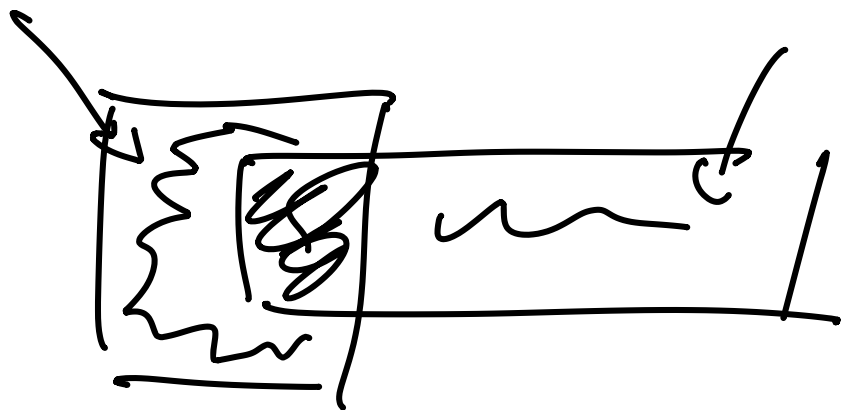
$$\iint_{E_1} = -1 \quad -1 > -4$$

$$\iint_{E_2} = -4$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \quad \stackrel{?}{\sim}$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy.$$

$$f \geq 0$$



2018



Question 2: Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, |y| \leq \min\{1, 2 - x\}\}$. Alors l'intégrale

$$\iint_D xy^2 dx dy$$

vaut

☐ $\frac{16}{15}$

☐ $\frac{2}{15}$

☐ $\frac{8}{15}$

☐ $\frac{4}{15}$

cartésiennes? ✓

$$1 \leq 2 - x \quad \Leftrightarrow x \leq 1$$

~~Polaire?~~

$$1 \geq 2 - x \quad \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\text{with } \{1, 2 - x\} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$y: \text{cloud } x \leq 1$$

$$-1 \leq y \leq 1$$

$$\text{cloud } x \geq 1$$

$$x-2 \leq y \leq 2-x$$

$$x: \text{cloud } x \leq 1$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$\text{cloud } x \geq 1$$

$$x \geq 0, \quad x-2 \leq 2-x \quad \Leftrightarrow \quad 2-x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 2$$

$$|a| \leq b$$

$$\Leftrightarrow -b \leq a \leq b$$

$$\iint xy^2 dx dy$$

D

$$= \int_0^1 \int_{-1}^1 xy^2 dy dx + \int_1^2 \int_{x-2}^{2-x} xy^2 dy dx$$

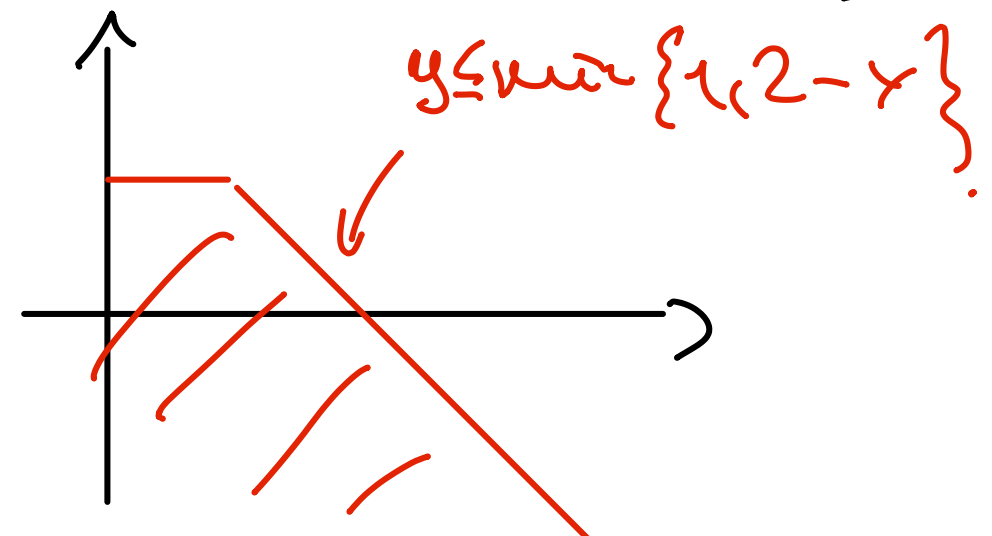
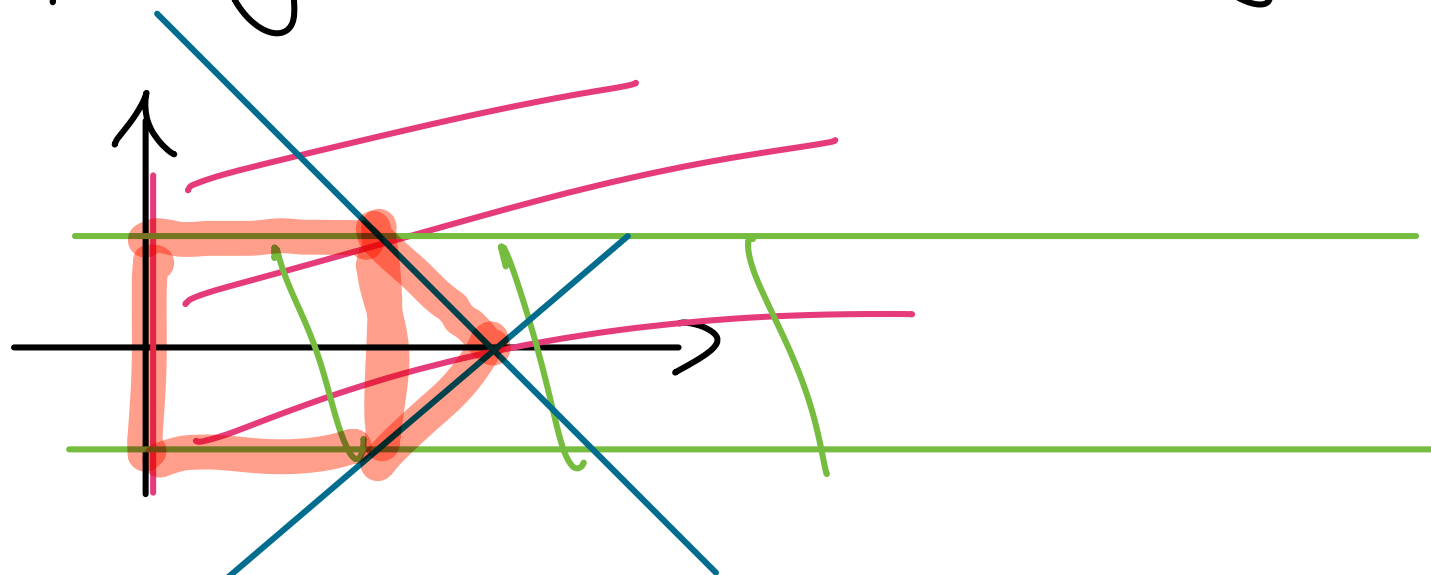
$$\hookrightarrow 1 \leq x \leq 2$$

$$y \leq \min(\alpha(x), \beta(x))$$

$$y \leq \alpha(x) \quad \& \quad y \leq \beta(x)$$

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \quad |y| \leq 1, \quad |y| \leq 2-x \}$$

$$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad x-2 \leq y \leq 2-x \}$$



2018

 $\mathbb{R}^2$

Question 19: Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble non vide, fermé et borné et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors

$$-\iint_D |f(x,y)| dx dy \leq \iint_D f(x,y) dx dy \leq \iint_D |f(x,y)| dx dy$$

si les intégrales existent.

☒ VRAI

☐ FAUX

Quelle partie du cours? $-|f(x,y)| \leq f(x,y) \leq |f(x,y)|$
 Propriétés alg de l'intégrale

$$f \leq g$$

$$\iint_D f(x,y) dx dy \leq \iint_D g(x,y) dx dy$$

$$\iint_D |f(x,y)| dx dy \leq \iint_D f(x,y) dx dy \leq \iint_D |f(x,y)| dx dy$$